习题 3.2

1. 求下列极限能够使用洛必达法则的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$　　　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$　　　　D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\ln x}{x-1}$

2. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$;　　　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$;　　　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;　　　　(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;　　　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(a+x^2), & x>1,\\ x+b, & x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导,求 a 和 b.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & x\neq 1,\\ -1, & x=1,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性和可导性.

3.3　函数的单调性与极值

试讲章节:3.3

根据中值定理,利用导数可以研究函数的性态,本节介绍利用一阶导数符号判断函数的单调性.

3.3.1　函数单调性的判定方法

由函数 $f(x)$ 单调性的定义可知,若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调减少,则曲线

$y=f(x)$是一条沿x轴正向下降的曲线，曲线上各点处的切线斜率都是非正的，即$f'(x)\leqslant 0$. 由此说明函数的单调性与导数的符号有着密切的联系. 那么能否用导数在一个区间上的正、负来判别函数在该区间上的单调性呢？

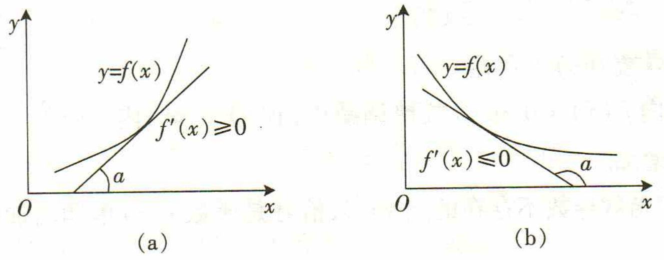

图3－5

定理1 （函数单调性判定法）设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则有：

(1) 若在(a,b)内$f'(x)>0$，则函数$f(x)$在$[a,b]$上单调增加；

(2) 若在(a,b)内$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

证明：设x_1,x_2是闭区间$[a,b]$上任意两点，且$x_1<x_2$，所以$(x_1,x_2)\subseteq[a,b]$. 于是，由定理1的假设知，函数$f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上连续，在开区间(x_1,x_2)内可导，即$f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上满足拉格朗日中值定理条件. 因此，存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$，使得下式成立.

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

若$f'(x)>0$，必有$f'(\xi)>0$，又$x_2-x_1>0$，于是有$f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_2)>f(x_1)$. 由于$x_1,x_2(x_1<x_2)$是$[a,b]$上任意两点，所以函数$f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

同理可证，若在闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$连续，在开区间(a,b)内$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上单调减少.

例1 讨论函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的单调性.

解：因为函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的定义域为$(0,+\infty)$，

在$(0,+\infty)$内$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令$f'(x)=0$得$x=\mathrm{e}$，这点将$f(x)$的定义域分成两个区间$(0,\mathrm{e}]$和$[\mathrm{e},+\infty)$.

在$(0,\mathrm{e})$内，$f'(x)>0$，故$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(0,\mathrm{e}]$上单调增加；

在$(\mathrm{e},+\infty)$内，$f'(x)<0$，故$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$[\mathrm{e},+\infty)$上单调减少.

本例说明：使$f'(x)=0$的点$x=\mathrm{e}$，恰好是函数$f(x)$单调增加区间和单调减少区间的分界点.

通常称$f'(x)=0$的点x为函数的驻点.

例 2　讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=(\sqrt[3]{x^2})'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

当 $x=0$ 时,导数 $f(x)$ 不存在.

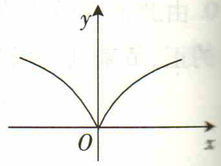

图 3-6

在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)<0$,故函数单调减少;在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$,故函数单调增加.

本例说明:使函数导数不存在的点 $x=0$,恰好是函数 $f(x)$ 单调增加区间与单调递减区间的分界点.

一般地,在确定连续函数的单调性时,先求出函数的驻点及不可导的点,用这些点划分函数定义域为若干区间,然后根据导数在各段区间上的符号来确定函数的单调性.

例 3　求函数 $f(x)=x^3-3x^2-24x+12$ 的单调区间.

解:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$.

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-2$,$x_2=4$. 用 x_1,x_2 将函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个区间 $(-\infty,-2)$,$(-2,4)$,$(4,+\infty)$,列表讨论如下:

表 3-1

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	40	↘	−68	↗

由于初等函数 $f(x)=x^3-3x^2-24x+12$ 在区间 $(-\infty,-2]$,$[4,+\infty)$,$[-2,4]$ 上连续,由表 3-1 可知,$f'(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 和 $(4,+\infty)$ 内均大于零,在 $(-2,4)$ 内小于零. 因此,$(-\infty,-2]$ 和 $[4,+\infty)$ 均为函数 $f(x)$ 的单调增区间,$[-2,4]$ 为函数 $f(x)$ 的单调减区间(表中"↗"表示单调增加,表中"↘"表示单调减少).

例 4　证明方程 $2x-\sin x=5$ 在闭区间 $[0,4]$ 上只有一个根.

证明:设 $f(x)=2x-\sin x-5$,则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续,且 $f(0)=-5<0$,$f(4)=8-\sin 4-5>0$. 由闭区间上连续函数的零点定理知,至少存在一点 $\xi\in(0,4)$,使得 $f(\xi)=0$,即方程 $2x-\sin x=5$ 在 $[0,4]$ 上至少有一个根.

又 $f'(x)=2-\cos x>0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上严格单调递增. 因此,方程 $2x-\sin x=5$ 在 $[0,4]$ 上至多有一个根.

综上可知,方程 $2x-\sin x=5$ 在闭区间 $[0,4]$ 上只有一个根.

3.3.2　函数的极值及其求法

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内有定义,若对去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内的任

一 x,都有

$$f(x)<f(x_0)\quad (\text{或} f(x)>f(x_0)),$$

则称函数值 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值,使函数取得极值的点称为极值点.

显然,极值是一个局部概念,它只与极值点邻近的其他点的函数值相比较. 如图 3-7 所示,函数 $f(x)$ 有两个极大值点 x_2,x_5,有三个极小值点 x_1,x_4,x_6. 其中极大值 $f(x_2)$ 比极小值 $f(x_6)$ 还小. 从图中还可以看出,在函数取得极值处,曲线在该点的左右两边的单调性发生变化,且有水平切线;但曲线有水平切线的地方,函数不一定取得极值. 例如,图中点 x_3 处,曲线有水平切线,但 $f(x_3)$ 并不是函数 $f(x)$ 的极值.

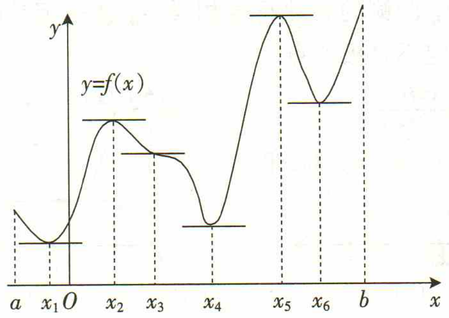

图 3-7

定理 2 (极值的必要条件)设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,且在 x_0 处取得极值,则一定有 $f'(x_0)=0$.

证明: 设 $f(x_0)$ 为极大值($f(x_0)$ 为极小值时可类似证明).

根据极值的定义,对于 $x\in \mathring{U}(x_0)$,恒有 $f(x)<f(x_0)$,于是

当 $x<x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\text{故} f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

当 $x>x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0,\text{故} f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

从而 $$f'(x_0)=0.$$

定理 2 表明,可导函数的极值点必定是驻点,但驻点却不一定是极值点. 例如,函数 $f(x)=x^3$ 的驻点就不是极值点. 还可得出,对可导函数而言,求极值点应先找出驻点,然后对驻点进行判断,哪些是极值点哪些不是极值点. 根据极值的定义及函数单调性的判定法不难知道:若在驻点两侧函数导数的符号相反,则驻点必然是使函数单调性改变的点,从而一定是函数的极值点. 由此我们得到下面的定理:

定理 3 (判别极值的第一充分条件)设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,且在点 x_0 的某一去心邻域内可导,x_0 为函数的驻点或不可导点,若在该去心邻域内,

(1)若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>x_0$,$f'(x)<0$,则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值;

(2)若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>x_0$,$f'(x)>0$,则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值;

(3)若在 x_0 两侧,$f'(x)$ 的符号相同,则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

显然(1)与(2)的证明是类似的. 由于证明极值是比较 x_0 处的函数值与其邻域内的其他点处的函数值,而拉格朗日中值定理就是讨论函数值之差与自变量之差之间的关系的,因此应用拉格朗日中值定理可证明.

证明:对于情形(1),根据函数单调性的判定法可知,在 x_0 左侧附近 $f(x)$ 是单调增加的,故 $f(x)<f(x_0)$;在 x_0 右侧附近 $f(x)$ 是单调减少的,故 $f(x)<f(x_0)$. 因此,$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值[图 3-8(a)]. 类似地可以论证情形(2)和情形(3).

定理 3 表明,若在点 x_0 两侧的导数符号相反,x_0 就一定是极值点;若在点 x_0 两侧的导数符号相同,则 x_0 就一定不是极值点.

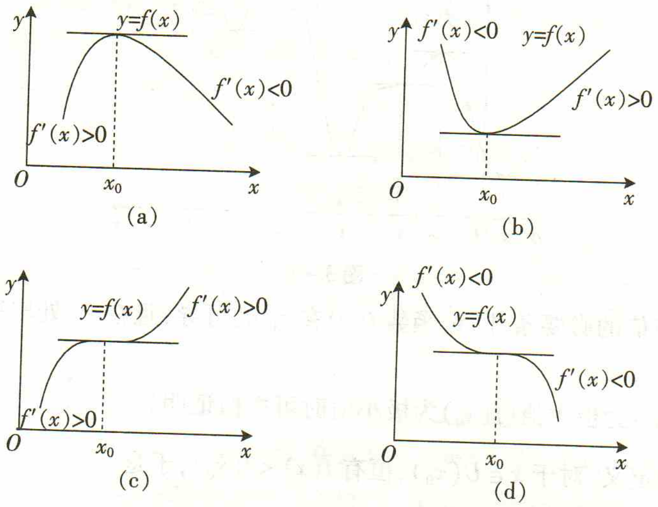

图 3-8

定理 4　(判别极值的第二充分条件)设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,那么

(1)当 $f''(x_0)<0$,则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值;

(2)当 $f''(x_0)>0$,则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

证明:对于情形(1),由二阶导数定义有:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)<0,$$

根据函数极限的局部保号性①,在点 x_0 的某去心邻域内,

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0,$$

① 保号性是指满足一定条件(如极限存在或连续的)的函数在局部范围内函数值的符号保持恒正或恒负的性质.

因为 $f'(x_0)=0$，所以

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

从而，当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值. 类似地可以证明情形(2).

注意：若 $f''(x_0)=0$，就不能用定理 3 来判断 x_0 是否为极值点. 事实上，当 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f(x)$ 在 x_0 处可能有极大值，也可能有极小值，也可能没有极值. 例如，$f(x)=-x^4$，$g(x)=x^4$，$h(x)=x^3$，这三个函数就分别属于这三种情况. 所以当函数在驻点处的二阶导数为零时，只能用定理 3 来判断，即由驻点左右两侧一阶导数的符号来判断.

根据以上定理，一般地可按下列步骤求函数的极值点和极值.

(1) 确定函数的定义域；

(2) 计算导数 $f'(x)$，求出 $f(x)$ 的全部驻点和不可导点；

(3) 对于(2)中求出的每一个点，根据极值的定义、定理 3 或者定理 4 判别这些点是不是极值点，若是极值点，进一步确定是极大值点还是极小值点；

(4) 求出各极值点处的函数值，就得到函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 5　求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解：该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1$，$x_2=3$. 驻点将定义域分成三部分，现列表讨论如下：

表 3－2

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表 3－2 可知，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，极大值为 $f(-1)=10$；在 $x=3$ 处取得极小值，极小值为 $f(3)=-22$.

例 6　求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解：$f'(x)=6x(x^2-1)^2$.

令 $f'(x)=0$，得

$$x_1=-1,x_2=0,x_3=1.$$

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

因 $f''(0)=6>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$.

又 $f''(-1)=f''(1)=0$，此时定理 4 失效，仍用定理 3 来判断.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值. 同理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处没有极值.

习题 3.3

1. 选择题

(1) 函数 $f(x)=x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是(　　).

A. 不单调　　B. 不连续　　C. 单调递增　　D. 单调递减

(2) 下列说法中不正确的是(　　).

A. 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$, 则不能确定点 $x=x_0$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点

B. 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$, 则点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点

C. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 的极大值不一定大于极小值

D. 若 $f'(x_0)=0$, 以及 $f'(x_0)$ 不存在的点 $x=x_0$, 都有可能为函数 $f(x)$ 的极值点

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值, 则必有(　　).

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f'(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

(4) 设函数 $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$, 则 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 间断点　　B. 可微点　　C. 驻点　　D. 极值点

2. 填空题

(1) 函数 $f(x)=2x^3-6x^2+7$ 在 $x=$__________处取得极大值__________, 在 $x=$__________处取得的极小值__________;

(2) $f(x)=e^{-x}\ln ax$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 取得极值, 则 $a=$__________.

3. 判定函数 $f(x)=x^3+x$ 的单调性.

4. 求曲线 $y=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间.

5. 求函数 $y=12x^5+15x^4-40x^3$ 的极值点与极值.

6. 可导函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3-3xy^2+2y^3=32$ 所确定, 试求 $f(x)$ 的极大值与极小值.