第 4 章　不定积分

一元函数积分学包括两个重要的基本概念，即不定积分与定积分. 在这一章，我们先从微分法的逆运算开始，引出不定积分的概念，讨论它的性质与求不定积分的方法，在下一章，再介绍定积分的概念、性质、计算方法，以及它的应用.

4.1　不定积分的概念

4.1　不定积分的概念

开始

4.1.1　原函数的概念

定义 1　在区间 I 上，如果对任意的 $x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad dF(x) = f(x)\,dx,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如，对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$(\sin x)' = \cos x$，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一个原函数.

又如，对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$(x^2)' = 2x$，故 x^2 是 $2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一个原函数.

一个函数具备什么条件，其原函数则一定存在？对此，我们给出一个原函数存在的充分条件：

定理 1　原函数存在定理：连续函数一定存在原函数.

注意到初等函数在其定义区间上都是连续函数，故初等函数在其定义区间内一定有原函数.

注意：(1) 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间上的一个原函数，则 $f(x)$ 对应有无限多个原函数 $F(x)+C$.

(2) 函数 $f(x)$ 的任意两个原函数之间只相差一个常数.

4.1.2　不定积分的定义

定义 2　在区间 I 上，如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，那么称 $f(x)$ 的所有原函数

$F(x)+C$(C 为任意常数)为 $f(x)$ 在该区间上的不定积分,记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中"$\int$ "称为积分号,$f(x)$ 称为被积函数,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式,x 称为积分变量.

由不定积分的定义可知,求函数 $f(x)$ 的不定积分时,可以先找出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$,再加上任意常数 C 即可.

例 1　求下列不定积分.

(1) $\int \cos x\mathrm{d}x$;　(2) $\int x\mathrm{d}x$;　(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　(4) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解:(1)因为 $(\sin x)'=\cos x$,即 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数,所以

$$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C.$$

(2)因为 $(x^2)'=2x$,则 $(\frac{1}{2}x^2)'=x$,即 $\frac{1}{2}x^2$ 是 x 的一个原函数,所以

$$\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C.$$

(3)因为 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,即 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数,所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C.$$

(4)当 $x>0$,$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,当 $x<0$,$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$,即

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}(x\neq 0),$$

所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

结束

4.1.3　不定积分与导数或微分的关系

由不定积分的定义可知,求不定积分与求导数(或微分)是互逆的运算,即

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int \mathrm{d}F(x)=\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.